No. of Printed Pages : 6 Roll No...............

ED-2758(S)

B.A./B.Sc./B.Sc. B.Ed. (Part-III)
Suppl. EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper First

(Analysis)

Time : Three hours **Maximum Marks : 50**

नोट– *प्रत्येक इकाई से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Attempt any two parts of each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई–1

Unit–1

1. (a) सिद्ध कीजिए कि e एक अपरिमेय संख्या है।

Prove that e is an irrational number.

(b) मान लो

$$f(x, y) \quad \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 \quad y^2)}{x^2 \quad y^2}, & \text{जब} \quad (x, y) \quad (0,0) \\ 0, & \text{जब} \quad (x, y) \quad (0,0) \end{cases}$$

[P.T.O.]

तो परिभाषा से निम्न के मानों को ज्ञात कीजिए–

$f_x(0,0),\ f_y(0,0),\ f_{xx}(0,0),\ f_{yy}(0,0),\ f_{xy}(0,0)$

Let

$$f(x, y) \quad \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 \quad y^2)}{x^2 \quad y^2}, & \text{when} \quad (x, y) \quad (0,0) \\ 0, & \text{when} \quad (x, y) \quad (0,0) \end{cases}$$

Then evaluate the following by definitions ;

$f_x(0,0),\ f_y(0,0),\ f_{xx}(0,0),\ f_{yy}(0,0)$ and $f_{xy}(0,0)$.

(c) फलन $f(x)$ के लिए अन्तराल (,) में फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए, जहाँ–

$$f(x) \quad \begin{cases} x, & x \quad 0 \\ x, & 0 \quad x \end{cases}$$

Find the Fourier series for the function $f(x)$, in the interval (,), where :

$$f(x) \quad \begin{cases} x, & x \quad 0 \\ x, & 0 \quad x \end{cases}$$

इकाई–2

Unit–2

2. (a) वास्तविक मान फलन $f : [0,2] \quad R$ निम्न अनुसार परिभाषित है–

$$f(x) \quad \begin{cases} x \quad x^2, & x \quad [0,2] \text{ तथा } x \text{ परिमेय है।} \\ x^2 \quad x^3, & x \quad [0,2] \text{ तथा } x \text{ अपरिमेय है।} \end{cases}$$

तब अन्तराल [0, 2] पर उपरि और निम्न रीमान समाकलों का मूल्यांकन कीजिए और सिद्ध कीजिए कि फलन f का अन्तराल [0, 2] पर समाकलनीय नहीं है।

Let the real-valued function $f:[0,2] \quad R$ is defined by :

$$f(x) \quad \begin{matrix} x \quad x^2 \;, \; x \quad [0,2] \text{ and } x \text{ is rational} \\ x^2 \quad x^3 \;, \; x \quad [0,2] \text{ and } x \text{ is irrational} \end{matrix}$$

Then evaluate the lower and upper Reimann integrals in the interval [0, 2]; and prove that the function f is not integrable in [0, 2].

(b) दो फलनों के गुणनफल के समाकल के अभिसरण के लिए आबेल परीक्षण का कथन लिखिए। इसकी सहायता से समाकलन के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

$$_a \; e^{\;x}, \frac{\sin x}{x^2}\, dx, \; a \quad 0$$

Write the statement of Abel's test for the convergence of Integral of product of two functions. By using this, test for the convergence of following integral :

$$_a \; e^{\;x}, \frac{\sin x}{x^2}\, dx, \; a \quad 0$$

(c) समाकलों के निरपेक्ष अभिसरण की परिभाषा लिखिए। सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समाकल निरपेक्षतः अभिसारी है–

$$_0 \; \frac{\cos mx}{a^2 \quad x^2}\, dx, a \quad 0$$

Define the absolute convergence of integrals. Prove that the following integral is absolute convergent :

$$_0 \; \frac{\cos mx}{a^2 \quad x^2}\, dx, a \quad 0$$

इकाई–3
Unit–3

3. (a) यदि $f(z) \quad u \quad iv$ एक विश्लेषिक फलन है तथा $z \quad re^{i}$, जहाँ $u, v, r,$ सभी वास्तविक हैं। तब दर्शाइये कि कौशी-रीमान समीकरण का ध्रुवीय रूप यह है–

$$r\frac{u}{r} \quad \frac{v}{\quad} \text{ और } r\frac{v}{r} \quad \frac{u}{\quad}$$

If $f(z) \quad u \quad iv$ is an analytic function and $z \quad re^{i}$, where $u, v, r,$ are reals. Then show that the polar form of Cauchy-Riemann equation is following :

$$r\frac{u}{r} \quad \frac{v}{\quad} \text{ and } r\frac{v}{r} \quad \frac{u}{\quad}$$

(b) दर्शाइये कि मोबियस रूपांतरण $w \quad \frac{5 \quad 4z}{4z \quad 2}$, z-समतल के वृत्त $|z| \quad 1$ को w समतल में इकाई वृत्त में रूपान्तरित करता है। इस वृत्त का केन्द्र ज्ञात कीजिए।

Show that the Mobius transformation $w \quad \frac{5 \quad 4z}{4z \quad 2}$ transforms the circle $|z| \quad 1$ of the z-plane into the unit circle of w-plane. Find the centre of this circle.

(c) दर्शाइये कि प्रतिचित्रण $z \quad \sqrt{w}$, वृत्तों के परिवार $|w \quad 1|$ को द्विपाशी वक्र (लैमिनिस्केट) के परिवार $|z \quad 1|.|z \quad 1| \quad$ में रूपांतरित करता है, जिसके नाभि बिन्दु $z \quad 1$ हैं।

show that the mapping $z \quad \sqrt{w}$ transforms the family of circles $|w \quad 1|$ into the family of double loop (lemniscate) $|z \quad 1|.|z \quad 1|$; whose focii are $z \quad 1$.

इकाई–4

Unit–4

4. (a) मान लो d एक अरिक्त समुच्चय X पर एक दूरीक है। दर्शाइये कि निम्न प्रकार से परिभाषित फलन

$$d^{*}(x, y) \quad \frac{d(x, y)}{1 \quad d(x, y)}$$

जहाँ $x, y \quad$ X भी X पर एक दूरीक है।

Let d be a metric on a non-empty set X. Show that the function defined below :

$$d^{*}(x, y) \quad \frac{d(x, y)}{1 \quad d(x, y)}$$

where $x, y \quad$ X is also a metric on X.

(b) किसी दूरीक समष्टि में दर्शाइये कि–

(i) प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम कौशी अनुक्रम होता है। तथा

(ii) प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

(विलोम का प्रमाण देना आवश्यक नहीं है)

In a metric space, show that :

(i) Every convergent sequence is a Cauchy sequence. and

(ii) Every Cauchy sequence is bounded.

(No need to prove the converse part)

(c) दर्शाइये कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R योग और गुणन के सापेक्ष एक क्षेत्र है। क्या R एक क्रमित क्षेत्र है?

Show that the set R of real numbers with respect to addition and multiplication is a field. Is R an ordered field ?

इकाई–5

Unit–5

5. (a) प्रथम एवम् द्वितीय गणनीय समष्टियों को उदाहरण सहित समझाइए।

Explain first countable space and second countable space by giving examples.

(b) दूरीक समष्टि में एक समान सांतत्य फलन को उदाहरण देकर समझाइए। यह सांतत्य से किस प्रकार भिन्न है?

Explain the uniform continuity of functions in a metric space. How it is different from continuity ?

(c) संहत समष्टि की परिभाषा दीजिए। दिखाइये कि साधारण दूरीक समष्टि (R, d) संहत नहीं है।

Define compact space. Show that the usual metric space (R, d) is not compact.