(स) सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक द्वि-एकघाती समघात को एक सममित और एक विषम सममित द्वि-एकघाती समघात के योग के रूप में अद्वितीय रूप से निरूपित किया जा सकता है।

Prove that every bilinear form can be represented uniquely by sum of a symmetric and a skew-symmetric bilinear forms.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) क्या $(\alpha, \beta) = a_1\bar{b}_2 + a_2, \alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2)$ एक आन्तर गुणन है ?

Is $(\alpha, \beta) = a_1\bar{b}_2 + a_2, \alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2)$ an inner product ?

(ब) ग्राम-श्मिट प्रक्रम का प्रयोग करके $s = \{1, x, x^2\}$ को एक प्रसामान्य लांबिक आधार में रूपांतरित कीजिए :

$$(p, q) = \int_0^1 p(x) \cdot \underline{q}(x)\, dx$$

Change $s = \{1, x, x^2\}$ into normalised orthogonal form by Gram-Schmidt process :

$$(p, q) = \int_0^1 p(x) \cdot \underline{q}(x)\, dx$$

(स) सिद्ध कीजिये कि एक आंतर गुणन सदिश समष्टि में शून्येतर सदिशों का कोई लांबिक समुच्चय रैखिकतः स्वतन्त्र होता है।

Prove that in an inner product space the orthogonal set of non-zero vectors is linearly independent.

B.Sc. (Part III) Internal Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper Second

(Abstract Algebra)

Time: Three Hours

Maximum Marks : 100

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) यदि $o(G) = 56$ है, तो बताइये कि G में कितने 2-सिलो उपसमूह होंगे और उनकी कोटि क्या होगी ?

If $o(G) = 56$, find how many 2-sylow subgroups are there in G and what is their orders ?

(ब) क्या $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ एक तुल्यकारिता है ?

Is $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ an isomorphism ?

(स) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह की सभी स्वकारिताओं का समुच्चय फलनों के संयोजन के सापेक्ष एक समूह होता है।

Prove that the set of all automorphisms of a group forms a group under composition of mappings.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) दिखाइये कि प्रत्येक आबेली समूह पूर्णांकों के वलय पर एक मॉड्यूल होता है।

Show that every abelian group is a module over the ring of integers.

(ब) शेषफल प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove remainder theorem.

(स) सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो वलय के बीच समाकारिता की अष्टि वस्तु वलय की गुणजावली होती है।

Prove that the kernel of homomorphism between two rings is ideal of element ring.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) क्या $V = R^2$ जिसमें सदिश योग और अदिश गुणन निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (3y + 3y_1, -x - x_1)$$
$$c(x, y) = (3cy, -cx)$$

एक सदिश समष्टि है ?

Is $V = R^2$ in which vector sum and scalar multiplication is defined as the following, a vector space ?

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (3y + 3y_1, -x - x_1)$$
$$c(x, y) = (3cy, -cx)$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि के किसी रैखिकतः स्वतन्त्र उपसमुच्चय को सदिश समष्टि का आधार निर्मित करने के लिए विस्तारित किया जा सकता है।

Prove that any linearly independent subset of any vector space can be extended to form a basis of that vector space.

(स) यदि $S = \{(2,1,4), (1,-1,2), (3,1,-2)\}$, तो क्या $R^3 = L(S)$?

If $S = \{(2,1,4), (1,-1,2), (3,1,-2)\}$ is $R^3 = L(S)$?

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सिद्ध कीजिये कि रैखिक रूपान्तरण $T : v_3 \to v_3$ जो

$$T(e_1) = e_1 + e_2,$$
$$T(e_2) = e_2 + e_3,$$
$$T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

द्वारा परिभाषित है, व्युत्क्रमणीय है तथा इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

$$T : v_3 \to v_3,$$
$$T(e_1) = e_1 + e_2,$$
$$T(e_2) = e_2 + e_3,$$
$$T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

Show that T is reversible and find its inverse.

(ब) निम्नलिखित समघात को वास्तविक विहित समघात में समानयन कीजिये और जाति तथा चिह्निका ज्ञात कीजिए :

$$\underline{q} = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + zx$$

Change the following into real canonical form and find rank and signature :

$$\underline{q} = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + zx$$