B.Sc. (Part II) Internal Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper First

(Advanced Calculus)

Time: Three Hours

Maximum Marks : 100

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^n}{\lfloor n} \right)^{\frac{1}{n}} = e$$

Prove that :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^n}{\lfloor n} \right)^{\frac{1}{n}} = e$$

(ब) श्रेणी :

$$x^2 + \frac{2^2}{3.4}x^4 + \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}x^6 + \frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8} + x^8 + \ldots\ldots x > 0$$

का अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test for convergence the series :

$$x^2 + \frac{2^2}{3.4}x^4 + \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}x^6 + \frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8} + x^8 + \ldots\ldots x > 0$$

(स) निम्नलिखित श्रेणी के निरपेक्ष अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \ldots\ldots\infty$$

Test for absolute convergence of the following series :

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \ldots\ldots\infty$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) निम्नलिखित फलन का $x = 0$ पर सांतत्यता के लिए परीक्षण कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Test for continuity of the following function at $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(ब) दर्शाइये कि फलन :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर संतत व अवकलनीय है।

Show that the function :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

is continuous and differentiable at $x = 0$.

(स) मान लीजिए $f(x, y) = xy^2 - x^2y$ मध्यमान प्रमेय के लिए θ का उपयुक्त मान ज्ञात कीजिए, यदि $a = b = 0, h = 1, k = 2$।

Let $f(x, y) = xy^2 - x^2y$, find the proper value of θ of mean value theorem, if $a = b = 0, h = 1, k = 2$.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$, यदि इसका अस्तित्व है, तो अद्वितीय है।

Prove that $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$, if it exists is unique.

(ब) यदि

$$u = \tan^{-1}\frac{xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}},$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

If :

$$u = \tan^{-1} \frac{xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}},$$

then prove that :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

(स) यदि $u^3 + v^3 = x + y$ और $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$, तो दर्शाइये कि :

$$J(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{y^2 - x^2}{2uv(u - v)}$$

If $u^3 + v^3 = x + y$ and $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$, then prove that :

$$J(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{y^2 - x^2}{2uv(u - v)}$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सरल रेखाओं $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के एन्वालोप का समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि $a^m b^m = c^{m+n}$, जहाँ c एक अचर है।

Find the envelope of the straight lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ when $a^m b^m = c^{m+n}$, where c is a constant.

(ब) एक संख्या n को तीन भागों x, y, z में इस प्रकार विभाजित कीजिए कि $ayz + bzx + cxy$ का मान उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ हो तथा इसे ज्ञात कीजिए।

Divide a number n into three parts x, y, z such that $ayz + bzx + cxy$ shall have a maximum or minimum and determine which its is.

(स) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

Find the evalute of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) दर्शाइये कि :

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} (1 - x)^{-\frac{2}{3}} (1 + 2x)^{-1} dx + \frac{1}{9^{1/3}} B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Show that :

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} (1 - x)^{-\frac{2}{3}} (1 + 2x)^{-1} dx + \frac{1}{9^{1/3}} B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

(ब) परवलय $y = x^2$ तथा रेखा $y = x$ के मध्य क्षेत्र R पर $\iint_R xy(x + y)\, dx\, dy$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\iint_R xy\,(x + y)\,dx\,dy$ over the area between the parabola $y = x^2$ and the line $y = x$.

(स) दिश: समाकल में समाकलन का क्रम बदलिये :

$$\int_0^{2a}\int_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x} f(x, y)\,dx\,dy$$

Change the order of integration in the double integral :

$$\int_0^{2a}\int_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x} f(x, y)\,dx\,dy$$