If :

$$\sin(A + iB) = x + iy$$

then prove that :

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1$$

$$\text{and } \frac{x^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\cos^2 A} = 1.$$

(स) श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए :

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + \ldots\ldots$$

Find the sum of the series :

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + \ldots\ldots$$

B.A./ B.Sc./ B.Sc. B.Ed. (Part I)

Internal Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper First

(Algebra and Trigonometry)

Time: Three Hours

Maximum Marks : 100

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any *two* parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) प्रारम्भिक रूपान्तरण की सहायता से A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Find the inverse of A with elementary transformation :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ब) कैले-हैमिल्टन प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Cayley-Hamilton theorem.

(स) निम्नलिखित आव्यूह को प्रसामान्य रूप में बदलिए एवं इसकी जाति तथा शून्यता ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix into normal form and find its rank and nullity :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) निम्नलिखित समीकरणों को आव्यूह विधि की प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2$$
$$2x + y - z = 1$$

Solve the following equations with the help of elementary operations of matrix method :

$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2$$
$$2x + y - z = 1$$

(ब) फेरारी विधि से चतुर्घात को हल कीजिए :

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$$

Solve the biquadratic by Ferrari's method :

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$$

(स) यदि समीकरण $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ के मूल हरात्मक श्रेणी (H. P.) में हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$27r^2 - 9pqr + 2q^3 = 0$$

If roots of the equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ are in H. P., then prove that :

$$27r^2 - 9pqr + 2q^3 = 0$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) यदि $f : A \to B$ एकैकी आच्छादक हो, तो दर्शाइये कि $f^{-1} : B \to A$ भी एकैकी आच्छादक होगा।

If $f : A \to B$ is one-one onto, then show that $f^{-1} : B \to A$ is also one-one onto.

(ब) लैग्रांज के प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's theorem.

(स) सिद्ध कीजिए कि एक समूह G के अरिक्त उपसमुच्चय H के एक उपसमूह होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि :

$$a \in H, b \in H \rightarrow ab^{-1} \in H$$

जहाँ b^{-1}, b का प्रतिलोम है।

Prove that necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup is that :

$$a \in H, b \in H \rightarrow ab^{-1} \in H$$

where b^{-1} is an inverse of b.

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) दिखाइये कि एक चक्रीय समूह, जिसकी कोटि n है, इकाई के n वें मूल के समूह से तुल्याकारी होता है।

Show that a cyclic group with finite order n is isomorphic to the multiplicative group of nth roots of unity.

(ब) सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ एक उपवलय होता है।

Prove that intersection of two subrings is a subring.

(स) दिखाइये कि प्रत्येक क्षेत्र अनिवार्यतः एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है।

Show that each field is necessarily an integral domain.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) यदि :

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta,$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

(i) $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$

(ii) $x^n - \dfrac{1}{x^n} = 2i\sin n\theta$

If :

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta,$$

then prove that :

(i) $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$

(ii) $x^n - \dfrac{1}{x^n} = 2i\sin n\theta$

(ब) यदि :

$$\sin(A + iB) = x + iy,$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1$$

तथा $\dfrac{x^2}{\sin^2 A} - \dfrac{y^2}{\cos^2 A} = 1.$