

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) सिद्ध कीजिए कि :

$$B(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n)!}, \quad (m, n > 0)$$

Prove that :

$$B(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n)!}, \quad (m, n > 0)$$

(ब) मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_1^e \int_0^{\log y} \int_1^{e^x} \log z \, dy \, dx \, dz$$

Evaluate :

$$\int_1^e \int_0^{\log y} \int_1^{e^x} \log z \, dy \, dx \, dz$$

(स) समाकलन का क्रम बदलिए :

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} \, dx \, dy$$

और इसका मूल्यांकन भी कीजिए।

Change the order of integration :

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} \, dx \, dy$$

and hence evaluate it.

DD-2708

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part II)

EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper First

(Advanced Calculus)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक इकाई से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any two parts of each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right]^{\frac{1}{n}}$ को मूल्यांकन कीजिए।

Evaluate :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1} \right)^1 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि श्रेणी :

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{3^3 x^3}{3} + \dots, \quad x > 0$$

अभिसारी है या अपसारी :

Prove that the series :

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{3^3 x^3}{3} + \dots, \quad x > 0$$

is convergent or divergent ?

(स) श्रेणी :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test for convergence and absolute convergence of series :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) निम्नलिखित फलन का $x = 0$ पर सांतत्यता के लिए परीक्षण कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Test for continuity of the following function at $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(ब) कौशी मध्यमान प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy mean value theorem.

(स) फलन :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

के लिए अंतराल $[2, 4]$ में लैग्रान्ज के मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify Lagrange's mean value theorem for the function :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

in the interval $[2, 4]$.

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) यदि :

$$u = x \sin^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

If:

$$u = x \sin^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$$

then prove that :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(ब) समीकरण :

$$\sin^2 2z \frac{d^2 y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0$$

का रूपान्तरण $\tan z = e^x$ रखकर कीजिए।

Transform the equation :

$$\sin^2 2z \frac{d^2 y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0$$

by substitution $\tan z = e^x$.

(स) यदि :

$$x = a \cosh \alpha \cos \beta$$

$$y = a \sinh \alpha \sin \beta$$

तो दर्शाइए कि :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{a^2}{2} [\cosh 2\alpha - \cos 2\beta]$$

If:

$$x = a \cosh \alpha \cos \beta$$

$$y = a \sinh \alpha \sin \beta$$

then show that :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{a^2}{2} [\cosh 2\alpha - \cos 2\beta]$$

(A-51)

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सरल रेखाओं के कुल :

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ कोण α प्राचल है।

Find the envelope of the family of lines :

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

where the parameter is the angle α .(ब) अतिपरवलय $2xy = a^2$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।Find the evolute of the hyperbola $2xy = a^2$.

(स) प्रतिबन्धों :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

तथा

$$lx + my + nz = 0$$

के अंतर्गत $u = x^2 + y^2 + z^2$ के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Find the maxima and minima value of the function

 $u = x^2 + y^2 + z^2$ using the conditions :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

and

$$lx + my + nz = 0.$$

(A-51) P. T. O.