

If:

$$\sin(A + iB) = x + iy$$

then prove that :

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1$$

$$\text{and } \frac{x^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\cos^2 A} = 1.$$

(स) श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए :

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2^2} \sin 3\alpha + \dots$$

Find the sum of the series :

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2^2} \sin 3\alpha + \dots$$

Roll No. ....

**DD-2648****B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part I)****EXAMINATION, 2020****MATHEMATICS****Paper First****(Algebra and Trigonometry)****Time : Three Hours****Maximum Marks : 50**

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any *two* parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) प्रारम्भिक रूपान्तरण की सहायता से A का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Find the inverse of A with elementary transformation :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ब) कैले-हैमिल्टन प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Cayley-Hamilton theorem.

(स) निम्नलिखित आव्यूह को प्रसामान्य रूप में बदलिए एवं इसकी जाति तथा शून्यता ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix into normal form and find its rank and nullity :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

इकाई-2

(UNIT-2)

2. (अ) निम्नलिखित समीकरणों को आव्यूह विधि की प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा हल कीजिए :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - y + z &= 2 \\ 2x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

(A-8)

Solve the following equations with the help of elementary operations of matrix method :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

(ब) फेरारी विधि से चतुर्घात को हल कीजिए :

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$$

Solve the biquadratic by Ferrari's method :

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$$

(स) यदि समीकरण  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$  के मूल हरात्मक श्रेणी (H. P.) में हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$27r^2 - 9pqr + 2q^3 = 0$$

If roots of the equation  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$  are in H. P., then prove that :

$$27r^2 - 9pqr + 2q^3 = 0$$

इकाई-3

(UNIT-3)

3. (अ) यदि  $f : A \rightarrow B$  एकैकी आच्छादक हो, तो दर्शाइये कि

$$f^{-1} : B \rightarrow A \text{ भी एकैकी आच्छादक होगा।}$$

If  $f : A \rightarrow B$  is one-one onto, then show that

$$f^{-1} : B \rightarrow A \text{ is also one-one onto.}$$

(ब) लैग्रान्ज के प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's theorem.

(A-8) P. T. O.

- (स) सिद्ध कीजिए कि एक समूह  $G$  के अखित उपसमुच्चय  $H$  के एक उपसमूह होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि :

$$a \in H, b \in H \rightarrow ab^{-1} \in H$$

जहाँ  $b^{-1}, b$  का प्रतिलोम है।

Prove that necessary and sufficient condition for a non-empty subset  $H$  of a group  $G$  to be a subgroup is that :

$$a \in H, b \in H \rightarrow ab^{-1} \in H$$

where  $b^{-1}$  is an inverse of  $b$ .

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) दिखाइये कि एक चक्रीय समूह, जिसकी कोटि  $n$  है, इकाई के  $n$  वें मूल के समूह से तुल्याकारी होता है।

Show that a cyclic group with finite order  $n$  is isomorphic to the multiplicative group of  $n$ th roots of unity.

- (ब) सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ एक उपवलय होता है।

Prove that intersection of two subrings is a subring.

- (स) दिखाइये कि प्रत्येक क्षेत्र अनिवार्यतः एक पूर्णाकीय प्रान्त होता है।

Show that each field is necessarily an integral domain.

(A-8)

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) यदि :

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta,$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(i) \quad x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\theta$$

$$(ii) \quad x^n - \frac{1}{x^n} = 2i \sin n\theta$$

If:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta,$$

then prove that :

$$(i) \quad x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\theta$$

$$(ii) \quad x^n - \frac{1}{x^n} = 2i \sin n\theta$$

- (ब) यदि :

$$\sin(A + iB) = x + iy,$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1$$

$$\text{तथा } \frac{x^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\cos^2 A} = 1.$$

(A-8) P. T. O.